

Exercices - types

Exercice I

Soit le support numérique :

x	0	1	2	3
F(x)	-3	-1,5	2	7,5

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Donnez l'expression de $\Phi(x)$
- A l'aide des méthodes de Lagrange et d'Horner déterminez les coefficients du polynôme d'interpolation.
- Calculez la somme des coefficients de Lagrange.

Exercice II

Soit $P_3(x)$ un polynôme de degré 3 s'exprimant : $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Dans ce qui suit, tous les calculs seront menés à l'aide de la méthode d'Horner.

- Déterminez les coefficients du polynôme quotient $Q(x)$ résultat de la division de $P_3(x)$ par $x-2$.
- Donnez la valeur du reste de la division de $P_3(x)$ par $x-2$.
- Calculez la valeur de $Q(x)$ en $x=3$. À l'aide de ce résultat et sans calculer directement $P_3(x)$ en $x=3$, donnez la valeur de $P_3(x)$ en $x=3$.

Exercice III

Dans ce qui suit, tous les calculs seront menés à l'aide de la méthode d'Horner. Soit le polynôme : $P(x) = x^3 - 13x + 12$.

- Calculez la valeur de $P'(x)$ en $x=1$. Donnez alors l'expression du polynôme $Q_1(x) = P(x)/(x-1)$. Donnez la valeur du reste de la division.
- Calculez l'expression de $Q_3(x) = P(x)/(x-3)$, de $Q_4(x) = P(x)/(x+4)$. Donnez dans chaque cas la valeur du reste de la division.
- Proposez à partir des résultats des questions précédentes, une écriture de $P(x)$ en fonction de ses racines sous la forme : $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$. Justifiez votre réponse.

Exercice IV

Soit le support numérique :

X_i	-1	0	2	3
$F(X_i) = Y_i$	11	7	5	7

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Déterminez la valeur en $x=1$ que prend le polynôme d'interpolation en utilisant la méthode de Lagrange.
- Que vaut la somme des coefficients de Lagrange ?
- La valeur théorique est $Y=5$ pour $X=1$. Quelle conjecture peut on faire quant à la nature de la fonction $F(X)$?

Exercice V

On cherche à calculer la dérivée d'une fonction $y = F(x)$ connue par ses points $\{ \{0, -2\}, \{1, -1\}, \{2, 2\} \}$.

Pour évaluer la dérivée en ces points, on se propose d'interpoler par la méthode de Lagrange la fonction F , puis de dériver le polynôme obtenu.

- Donnez l'expression générale des coefficients de Lagrange. On donnera les deux formes vues en cours.
- Déterminez les coefficients des trois polynômes-coefficients de Lagrange
- Donnez l'expression littérale sous forme canonique décroissante du polynôme d'interpolation.
- Calculez la valeur de la dérivée aux points 0, 1 et 2 en utilisant la méthode de Horner

Exercice VI

Calculez la valeur prise par le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ en $\alpha = 2$, ainsi que la valeur de la dérivée de ce même polynôme en ce même point par la méthode d'Hörner.

Exercice VII

Soit le support numérique :

X	0	1	2
Y=F(X)	Y ₀	Y ₁	Y ₂

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Donnez l'expression littérale du polynôme d'interpolation en fonction de Y_0, Y_1 et Y_2 .
- En intégrant le polynôme obtenu entre $X=0$ et $X=2$, exprimez la valeur de l'intégrale $I = \int_0^2 F(X) dX$ en fonction de Y_0, Y_1 et Y_2 .

Exercice VIII

Soit $P_5(x)$ un polynôme de degré 5 s'exprimant : $P_5(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$

- Calculez en utilisant le schéma de Horner la valeur $P_5(2)$.
- Déterminez le polynôme quotient $Q_3(x)$ résultant de la division de $P_5(x)$ par $T(x) = x^2 - 9$: $P_5(x) = T(x)Q_3(x) + R(x)$.
Pour ce faire vous rechercherez les racines évidentes de $T(x)$ après l'avoir factorisé puis utiliserez la méthode d'Horner pour réaliser les deux divisions.
Au vu des résultats de vos calculs vous expliquerez pourquoi cette méthode est ici possible.
Donnez l'expression du reste $R(x)$.
- Calculez la valeur de $Q(x), T(x)$ et $R(x)$ en $x=2$.
- Retrouvez la valeur de $P_5(x)$ en $x=2$ à l'aide des valeurs calculées précédemment.

Exercice IX

On cherche à déterminer avec une précision de $1e-6$ la racine de l'équation $\text{Log}_e(x) - 1 = 0$. Pour ce faire on envisage d'utiliser la méthode de Newton. On indique que le logarithme utilisé est le logarithme base e.

- Etablissez l'expression de la relation de récurrence reliant deux approximations successives
- Calculez une valeur approchée de la racine avec 6 décimales en prenant comme point de départ : $x_0 : 2$.

Exercice X

Une mesure de courant en fonction du temps a donné le tableau de valeurs suivants :

t (s)	0	1	2	3
I (mA)	20	8	4	2

Afin déterminer avec précision l'instant où le courant devient égal à 6mA, vous procéderez de la manière décrite ci-après.

- Déterminez l'ensemble des coefficients de l'expression canonique décroissante du polynôme d'interpolation $P_L(t) = I(t)$ en utilisant la méthode de Lagrange.
- On cherche t tel que : $I(t) = 6$. Dans cette équation remplacez $I(t)$ par $P_L(t)$. Donnez l'expression de l'équation alors obtenue.
- En utilisant les méthodes d'Horner et de Newton, déterminez la valeur qui vérifie l'équation obtenue à la question 2. Vous donnerez une valeur approchée de la racine avec une précision meilleure que 10^{-2} . Le point de départ sera pris égal à 1. Les calculs seront menés avec une précision de 4 décimales.

Exercice XI

Soit $P_3(x)$ un polynôme de degré 3 s'exprimant : $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- Déterminez une racine du polynôme par la méthode de Newton en prenant comme point de départ $x = 2$.
- Même question en prenant comme point de départ $x = 1,25$.

La précision des calculs sera d'au moins 4 décimales. Tous les calculs polynomiaux seront menés à l'aide de la méthode de Horner. La solution sera donnée avec une précision meilleure que 10^{-2} .

Exercice XII

Soit le support numérique :

X_i	-1	0	1	2	3
Y_i	6	1	-2	-3	-2

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Calculez la valeur que prend le polynôme d'interpolation en $x=2$ par la méthode de Lagrange en utilisant la méthode du tableau vue en TD. Pour ce calcul **on ne prendra pas** le point $\{2, -3\}$ dans le tableau de données ci-dessus (colonne grisée).
- Déterminez les coefficients du polynôme d'interpolation $P_L(x)$ en utilisant la méthode de Lagrange.

Exercice XIII

L'algorithme d'Héron d'Alexandrie permet d'extraire la racine carrée d'un nombre par une méthode itérative. En utilisant la méthode de Newton (racine d'une équation), établissez cette méthode itérative.

Indication : l'équation dont on cherche la racine est $g(x) - A = 0$ où A est le nombre dont on cherche la racine carrée et $g(x)$ la fonction qui à x associe x^2 .

- Déterminez la racine carrée de 2 avec une précision meilleure que 10^{-4} en prenant comme point de départ $x_0 = 1$.

Exercice XIV

Nota Bene : tous les calculs de cet exercice se feront avec exactement 4 chiffres significatifs.

Un circuit à composant actif a une réponse en courant pouvant être approchée par l'expression suivante $i(v) = 10(1 - \exp(-4v))$, on cherche à déterminer son point de fonctionnement en déterminant le point d'intersection avec la droite de charge : $i(v) = 10 - v$

- En écrivant l'égalité des courants, donnez l'expression de l'équation à résoudre.
- Résolvez cette équation par la méthode de Newton en prenant comme point de départ $v = 0,6$ V. La solution doit être donnée avec une précision de 0,01V.

Exercice XV

Soit le support numérique suivant :

X	-2	0	2	4	6
Y	0,25	1	4	16	64

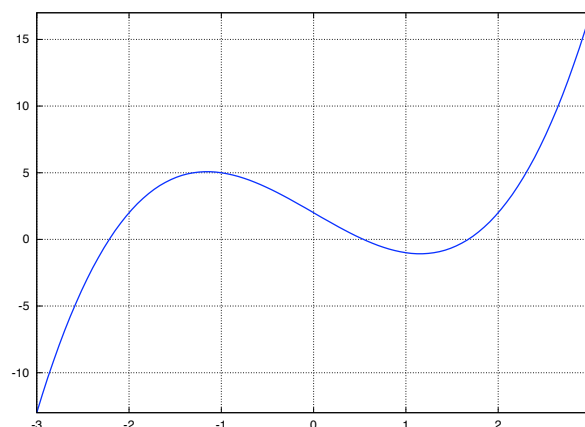
- Calculez la valeur que prend le polynôme d'interpolation en $\alpha=1$ par la méthode de Lagrange en utilisant le tableau ci-dessus.
- La valeur trouvée vous semble-t-elle correcte ? Justifiez votre réponse.
- Les Y sont issus de la fonction $f(x) = 2^x$. Quelle méthode proposez-vous pour calculer une approximation exacte ? Faites le calcul et comparez alors la valeur trouvée avec la valeur de la fonction $f(x)$ en $x=1$.

Exercice XVI

- Comment calcule-t-on x_{n+1} si l'on connaît x_n et que l'on recherche une valeur approchée d' α une racine de $f(x)$ par la méthode de Newton ?
- Donnez des critères nécessaires à la convergence de la méthode de Newton. Sont-ils numériquement exploitables ? Justifiez vos réponses.

Exercice XVII

On se propose de déterminer les racines du polynôme $P_3(x) = x^3 - 4x + 2$ que l'on a tracé sommairement ci-dessous. Donnez les racines avec une précision de 10^{-3} en utilisant la méthode de Newton. Pour chaque racine, choisissez une valeur de départ arrondie à 0,5 près. Pour chaque racine vous justifierez le choix du point de départ.



Exercice XVIII

- Soit le support numérique :

x_i	-4	-2	0	2	4
$y_i=F(x_i)$	6	-6	-10	-6	6

- Quel est, a priori, le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Calculez la valeur en $x=1$ que prend le polynôme d'interpolation déterminé par la méthode de Newton.
- On sait par ailleurs que $F(1) = -9$. Comparez cette valeur avec celle que vous avez trouvé.
Quelle conjecture pouvez-vous faire quant à la nature de la fonction F ?
Avez-vous une autre raison pour émettre cette hypothèse ?
- En supposant les conditions requises vérifiées, calculez à l'aide du tableau des différences la valeur de la fonction $F(x)$ en $x = 6$.

Exercice XIX

Soit le support numérique :

X	0	1	2	3
$Y=F(X)$	3	4	7	12

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- $F(X)$ est une fonction polynomiale. A l'aide du tableau des différences déterminez son degré.
- Déterminez la valeur de tous les coefficients de la forme canonique croissante du polynôme d'interpolation exprimé en variable réduite u .
- En remplaçant la variable réduite par son expression, déterminez l'expression du polynôme d'interpolation. On donnera la valeur de tous les coefficients de sa forme canonique décroissante.