"Calcul Scientifique"

P. Castelan

philippe.castelan@laplace.univ-tlse.fr

Objectifs

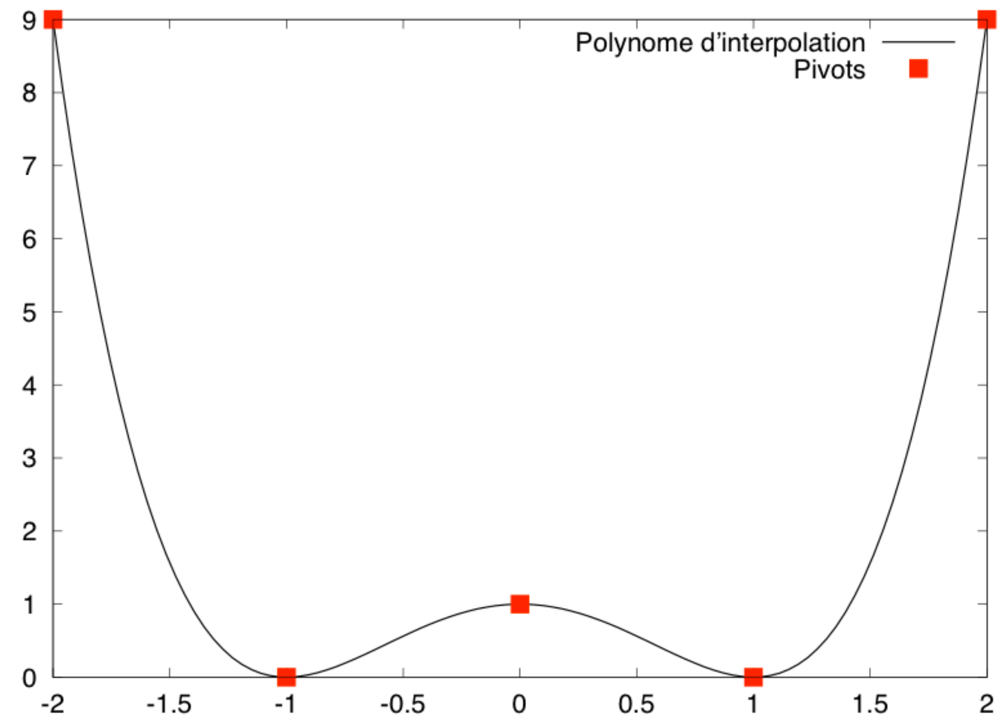
★ Notion d'interpolation

★ Mise en oeuvre et programmation

★ Comprendre les limites de la méthode

I Interpolation : Approche de Newton

Exemple d'interpolation :



Les points rouges dans la courbe ci-dessus représentent les pivots.

Les n+1 pivots sont connus :

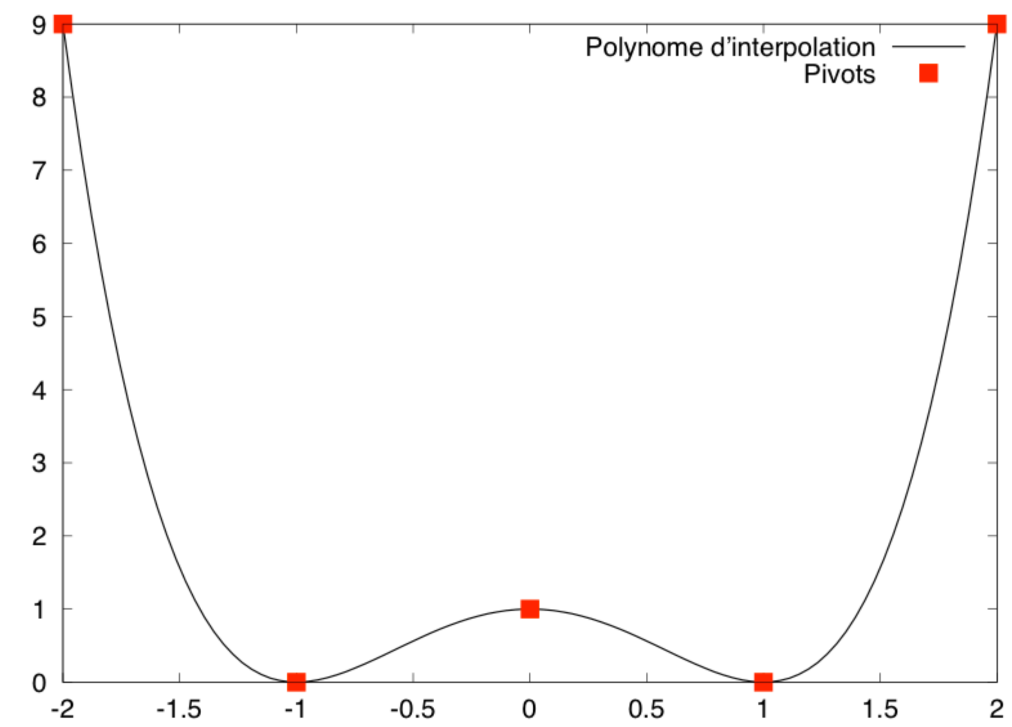
X: x_0 x_1 … x_i … x_n

Y: y_0 y_1 … y_i … y_n

I Interpolation : Approche de Newton

La base utilisée est la base :

$$g_0(x) = \prod_0(x) = 1$$
$$g_1(x) = \prod_1(x) = (x - x_0)$$
$$g_2(x) = \prod_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$
$$\vdots$$
$$g_k(x) = \prod_k(x) = (x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$$
$$\vdots$$
$$g_n(x) = \prod_n(x) = (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$



$$P_n(x) = \sum_k A_k g_k(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

Dans le cas le plus fréquent, le pas est contant et l'on a :

$$h = x_{k+1} - x_k = cste \, \forall k \in [0,n-1]$$

Dans ce cas le polynôme se réécrit :

$$P_n(x) = \sum_k A_k g_k(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - (x_0 + h)) + \dots + A_n(x - x_0)\dots(x - (x_0 + (n-1)h))$$

II Newton : Différences Finies

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_0 - h) + \ldots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_0 - (n-1)h)$$

Différences finies

Pour n+1 pivots… équidistants.

On appelle différence finie d'ordre 0 pour y_i : $\Delta^0_{y_i} = y_i$

On appelle différence finie d'ordre 1 pour y_i : $\Delta^1_{y_i} = \Delta^0_{y_{i+1}} - \Delta^0_{y_i}$

On appelle différence finie d'ordre 2 pour y_i : $\Delta^2_{y_i} = \Delta^1_{y_{i+1}} - \Delta^1_{y_i}$

…

On appelle différence finie d'ordre k pour y_i : $\Delta^k_{y_i} = \Delta^{k-1}_{y_{i+1}} - \Delta^{k-1}_{y_i}$

Exemple pour le pivot y_0

$$\Delta^0_{y_0} = y_0$$

$$\Delta^1_{y_0} = \Delta^0_{y_1} - \Delta^0_{y_0} = y_1 - y_0$$

$$\Delta^2_{y_0} = \Delta^1_{y_1} - \Delta^1_{y_0} = \left(\Delta^0_{y_2} - \Delta^0_{y_1}\right) - \left(\Delta^0_{y_1} - \Delta^0_{y_0}\right) = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3_{y_0} = \Delta^2_{y_1} - \Delta^2_{y_0} = \left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) - \left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

…

II Newton : différences finies

A partir d'un certain rang, il n'y a plus de différences à calculer

Avec 4 points…

y_0

$\Delta^1_{y_0} = y_1 - y_0$

y_1 $\qquad \Delta^2_{y_0} = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$

$\Delta^1_{y_1} = y_2 - y_1$ $\qquad \Delta^3_{y_0} = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

y_2 $\qquad \Delta^2_{y_1} = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$

$\Delta^1_{y_2} = y_3 - y_2$

y_3

En y_0

$\Delta^0_{y_0} = y_0$

$\Delta^1_{y_0} = y_1 - y_0$

$\Delta^2_{y_0} = y_2 - 2y_1 + y_0$

$\Delta^3_{y_0} = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$

…

C'est un triangle de Pascal alterné

$$\Delta^k_{y0} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j y_{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

II Newton : propriétés des différences finies.

Avec un polynôme de degré 2

x	1	2	3	4
$y = x^2 - 2$	-1	2	7	14

$$
\begin{array}{cccc}
\Delta^0 & \Delta^1 & \Delta^2 & \Delta^3 \\
-1 & & & \\
 & 3 & & \\
2 & & 2 & \\
 & 5 & & 0 \\
7 & & 2 & \\
 & 7 & & \\
14 & & &
\end{array}
$$

Si le support résulte d'un polynôme de degré n alors les différences d'ordre n sont constantes. (Admis)

III Newton : Ecriture du polynôme

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_0 - h) + \ldots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_0 - (n-1)h)$$

Par hypothèse Pn(x_k) = y_k

Si $x = x_0 : P_n(x_0) = A_0 = y_0$

Si $x = x_1 : P_n(x_0 + h) = A_0 + h\,.A_1 = y_1$

Si $x = x_2 : P_n(x_0 + 2h) = A_0 + 2.h\,.A_1 + 2h\,.h\,.A_2 = y_2$

Si $x = x_3 : P_n(x_0 + 3h) = A_0 + 3h\,.A_1 + 3h.2h\,.A_2 + 3h.2h\,.h\,.A_3 = y_3$

$\vdots$

Le système de n équations est simple à traiter : il est triangulaire.

$$A_0 = y_0 = \Delta^0_{y_0}$$

$$h\,.A_1 = y_1 - y_0 = \Delta^1_{y_0}$$

$$2h\,.h\,.A_2 = y_2 - A_0 - 2\Delta^1_{y_0} = y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta^2_{y_0}$$

$$3h.2h\,.h\,.A_3 = y_3 - y_0 - 3(y_1 - y_0) - 3(y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^3_{y_0}$$

$\vdots$

Soit : $A_i = \dfrac{\Delta^i_{y_0}}{i!h^i}$

III Newton : Ecriture du polynôme

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

En remplaçant :

$$P_n(x) = \frac{\Delta^0_{y_0}}{0!h^0} + \frac{\Delta^1_{y_0}}{1!h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2_{y_0}}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n_{y_0}}{n!h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Expression en variable réduite :

$u = \dfrac{x - x_0}{h}$ et $\dfrac{x - x_k}{h} = \dfrac{x - (x_0 + kh)}{h} = \dfrac{x - x_0}{h} - \dfrac{kh}{h} = u - k$

Soit : $(x - x_0) = h * u$ et $(x - x_k) = h * (u - k)$

Le polynôme se réécrit :

$$P_n(u) = \frac{\Delta^0_{y_0}}{0!} + \Delta^1_{y_0}\frac{u}{1!} + \Delta^2_{y_0}\frac{u(u-1)}{2!} + \ldots + \Delta^n_{y_0}\frac{u(u-1)\ldots(u-n-1)}{n!}$$

III Newton : Ecriture du polynôme

Remarques :

La méthode permet de calculer une valeur ou d'obtenir l'expression du polynôme.

La méthode nécessite le calcul préalable des différences finies.

Attention, ce calcul peut être délicat… (les différences tendent vers 0), on préfère alors Lagrange…

La méthode existe pour le cas des points non équidistants, mais est moins commode : différences finies divisée… on préfère en cas Lagrange

Lagrange et Newton déterminent le même polynôme (il est unique !)

* Approche Lagrange via les abscisses : coefs de Lagrange

* Approche Newton via les ordonnées : différences finies.

III Newton : Exemple de calcul.

$$P_n(u) = \frac{\Delta^0_{y_0}}{0!} + \Delta^1_{y_0}\frac{u}{1!} + \Delta^2_{y_0}\frac{u}{1}\frac{(u-1)}{2} + \Delta^3_{y_0}\frac{u}{1}\frac{u-1}{2}\frac{u-2}{3} + \ldots + \Delta^n_{y_0}\frac{u(u-1)\ldots(u-n-1)}{1!}$$

$x_0 = -3$, $h = 1$, $n = 6$, les $y_k=f(x_k)$ sont dans la liste suivante :

Y_k	20	16	8	2	4	20	56

Tableau des différences

$y_k=\Delta^0 y_0$	$\Delta^1 y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
20	-4	-4	6	0	0	0
16	-8	2	6	0	0	
8	-6	8	6	0		
2	2	14	6			
4	16	20				
20	36					
56						

$$\alpha = 0{,}5 \Rightarrow u = \frac{0{,}5+3}{1} = 3{,}5 = \frac{7}{2}$$

$$P(u) = 20 - 4\frac{3{,}5}{1} - 4\frac{3{,}5}{1}\frac{2{,}5}{2} + 6\frac{3{,}5}{1}\frac{2{,}5}{2}\frac{1{,}5}{3} = 1{,}625$$

III Newton : Exemple de calcul.

$x_0 = -3$, $h = 1$, $n = 6$, les $y_k=f(x_k)$ sont dans la liste suivante :

Y_k	20	16	8	2	4	20	56

Il est possible de prolonger en haut et en bas le tableau des différences

x_k	y_k	Δ^1	Δ^2	Δ^3	
-4	**14**	**6**	**-10**	**6**	
-3	20	-4	-4	6	**0**
-2	16	-8	2	6	0
-1	8	-6	8	6	0
0	2	2	14	6	**0**
1	4	16	20	**6**	
2	20	36			
3	56				
4					

Extra

Inter

Extra