"Calcul Scientifique"

P. Castelan

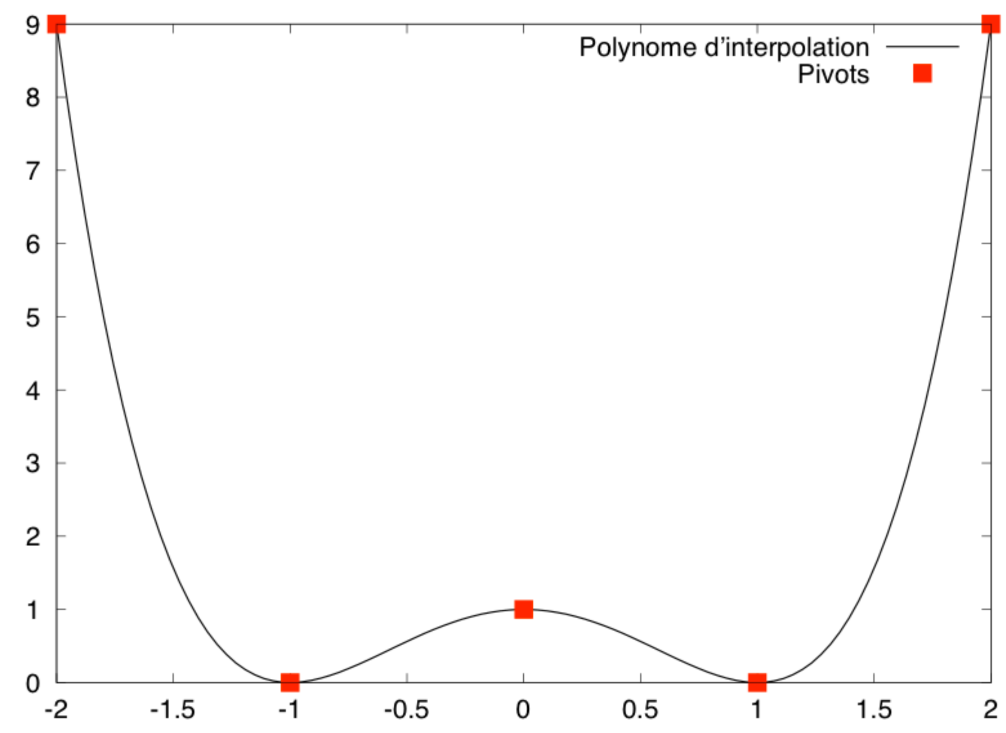
philippe.castelan@laplace.univ-tlse.fr

Objectifs

- ★ Notion d'interpolation
- ★ Mise en oeuvre et programmation
- ★ Comprendre les limites de la méthode

I Position du problème

Exemple d'interpolation :



Les points rouges dans la courbe ci-dessus représentent les pivots.

Interpoler consiste à remplacer une fonction f(x) par une autre fonction g(x). La fonction f(x) peut être connue :

- Par les valeurs qu'elle prend en certains points : pivots
- Analytiquement

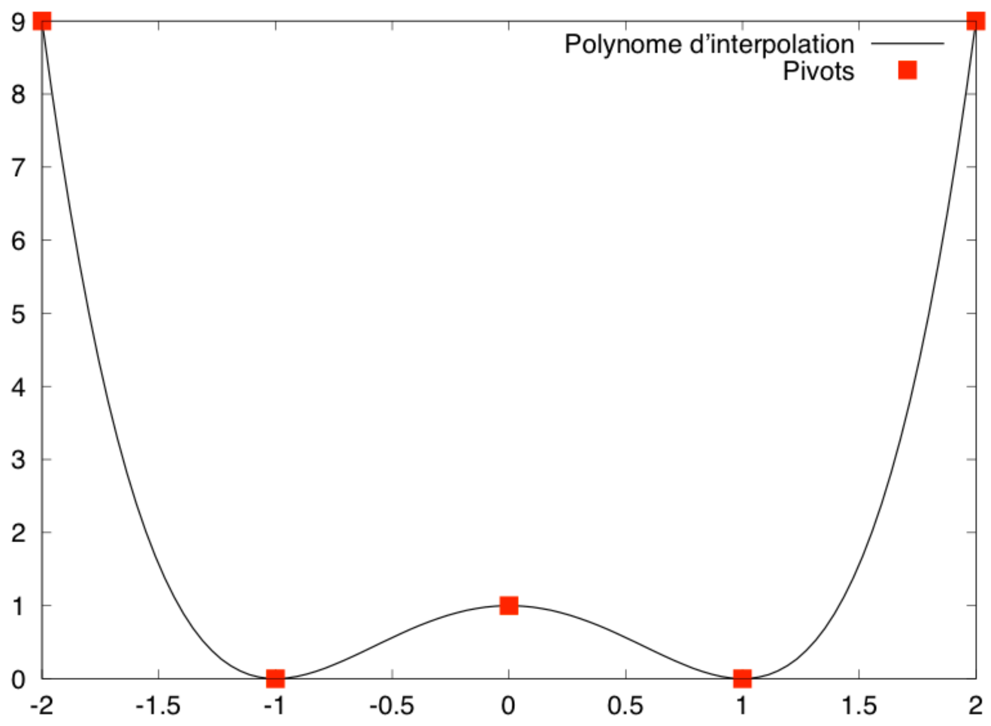
Sur un intervalle donné toute fonction continue peut être représentée par un polynôme...

I Position du problème

Remarques importantes sur le polynôme d'interpolation :

- Il passe exactement par les pivots
- Il est unique
- Il n'a de sens qu'entre les pivots : entre X_{min} et X_{max} : c'est de l'interpolation
- Il est possible de :
  - Calculer l'expression du polynôme d'interpolation, de le déterminer
  - Calculer la valeur qu'il prend en certains points

Suivant le cas on choisira l'une ou l'autre approche



II principe de la méthode

On se donne une base polynomiale $G_0(x) \ldots G_n(x)$ et on écrit $P_n(x)$ dans cette base :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i G_i(x)$$

En général, la base est la base canonique : 1, x…

Par hypothèse, on connait les n+1 pivots { $\{X_k, Y_k\}$ }, et l'on écrit qu'il y a concordance totale entre les pivots et le polynôme d'interpolation : $Y_k = P_n(X_k)$ ce qui conduit à n+1 équations a n+1 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n \\ y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n \end{array} \right.$$

Il principe de la méthode

Bien entendu la résolution du système est pénible et coûteuse en temps de calcul…

Newton et Lagrange ont développé des stratégies pour éviter cette résolution.

Ce sont deux approches différentes, mais elles donne évidement le même polynôme d'interpolation puisqu'il n'y en a qu'un…

Nota Bene :

Parfois il importe peu que le polynôme passe exactement par les points : toute mesure est forcément entachée d'erreur de mesure et parfois il importe que le polynôme passe par les pivots.

Dans le premier cas on pratiquera de l'ajustement (polynomial ou pas !) dans le second…

III Méthode de Lagrange

On a n+1 pivots connus :

x:	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
y:	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

On cherche à déterminer $P_n(x)$ tel que $P_n(x_i) = y_i$

Construisons le polynôme ϕ :

$$\Phi(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$$

Par construction, ce polynôme de degré n+1 admet les pivots comme racines.

Formons la fraction et calculons sa décomposition en éléments simples.

$$\frac{P_n(x)}{\Phi(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x - x_k}$$

III Méthode de Lagrange

(1) $$\frac{P_n(x)}{\Phi(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x - x_k}$$

On peut calculer les : $a_k = \lim_{x \to x_k} (x - x_k) \frac{P_n(x)}{\Phi(x)}$

D'où :

$$a_k = \lim_{x \to x_k} (x - x_k) \frac{P_n(x)}{\Phi(x) - \Phi(x_k)} = \lim_{x \to x_k} \frac{(x - x_k)}{\Phi(x) - \Phi(x_k)} P_n(x) = \frac{1}{\Phi'(x_k)} P_n(x_k) = \frac{1}{\Phi'(x_k)} y_k$$

Reconnaitre la dérivée et bien noter que par hypothèse $P_n(x_k) = y_k$

En remplaçant a_k par son expression dans la fraction (1)

$$\frac{P_n(x)}{\Phi(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x - x_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\Phi'(x_k)(x - x_k)}$$

III Méthode de Lagrange

$$\frac{P_n(x)}{\Phi(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x - x_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\Phi'(x_k)(x - x_k)}$$

Soit :

$$P_n(x) = \Phi(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x - x_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)} y_k$$

On pose alors :

$$\boxed{L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)} \rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k}$$

$L_k(x)$ est un coefficient de Lagrange, c'est un polynôme de degré n

III Méthode de Lagrange

$$L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)} \rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k$$

Or : $\Phi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

Il nous faut calculer la dérivée de $\Phi(x)$…

Il y a deux stratégies…

Exemple avec 3 points…

$\Phi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

C'est le produit de 3 fonctions : f.g.h et (f.g.h)' = f'.g.h + f.g'.h + f.g.h'

Soit :

$\Phi'(x) = (x - x_0)'(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)'(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)'$

$\Phi'(x) = 1.(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0).1.(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1).1$

Or dans $L_k(x)$ il faut calculer $\Phi'(x_k)$, par exemple k vaut 1 ce qui donne :

$\Phi'(x_1) = 1.(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) + (x_1 - x_0).1.(x_1 - x_2) + (x_1 - x_0)(x_1 - x_1).1 = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$

III Méthode de Lagrange

$$\Phi'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{2} (x_1 - x_j)$$

De manière générale :

$$\Phi'(x_k) = (x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$$

Or : $L_k(x) = \dfrac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)}$

$$L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)(x - x_k)} = \frac{\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)(x - x_k)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

III Méthode de Lagrange

On a établi que : $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k$$

Avec : $$L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)}$$ ou $$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Stratégie 1 :
On calcule $\Phi(x)$ qui est un polynôme de degré n+1
Il suffit de calculer sa valeur et la valeur de sa dérivée ?
Horner !

Stratégie 2 :
On utilise l'expression du $L_k(x)$

III Méthode de Lagrange

$$L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)}$$

Remarques sur les coefficients de Lagrange :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

- $L_k(x_k) = 1$
- $L_k(x_j) = 0$ (si $j \neq k$)
- $\sum L_k(x) = 1$

Variable réduite :

x:	x_0	x_1	…	x_i	…	x_n
y:	y_0	y_1	…	y_i	…	y_n

On a : $x_k = x_0 + k*h$ où h est le pas, et est constant

On pose alors : $u = \frac{x - x_0}{h}$

III Méthode de Lagrange : Variable réduite

On a : $x_k = x_0 + k*h$ où h est le pas, et est constant

On pose alors : $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

Si :

$$x = x_0 \rightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0$$

$$x = x_1 \rightarrow u = \frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = 1$$

$$x = x_k \rightarrow u = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{(x_0 + k * h) - x_0}{h} = k$$

Dans ces conditions :

$$L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)} \rightarrow \frac{\Phi(u)}{\Phi'(k)(u - k)}$$

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \rightarrow \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{u - j}{k - j}$$

Et avec tout ça, vous sauriez utiliser la méthode ?

IV Méthode de Lagrange : Méthode du tableau

x_i	0	2	4	5	6
$y_i = 3x^2 + 2$	2	14	50	77	110

$$L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)}$$

On veut calculer en x=1 (point manquant)

1	0	2	4	5	6	Li	Yi	Li*Yi
0	**1**	-2	-4	-5	-6	0,25	2	0,5
2	2	**-1**	-2	-3	-4	1,25	14	17,500
4	4	2	**-3**	-1	-2	-1,25	50	-62,500
5	5	3	1	**-4**	-1	1	77	77,000
6	6	4	2	1	**-5**	-0,25	110	-27,500
	φ(α) =	60			Somme	1		5,000

IV Méthode de Lagrange : Expression de $P_n(x)$

x_i	0	2	4	5
$y_i = x^2 - 2$	-2	2	14	23

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{-2 * -4 * -5} = \frac{(x^2 - 6x + 8)(x-5)}{-40} = \frac{x^3 - 11x^2 + 38x - 40}{-40}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x-5)}{2 * -2 * -3} = \frac{x^3 - 9x^2 + 20x}{12}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{4 * 2 * -1} = \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{-8}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{5 * 3 * 1} = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{15}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k$$

$$P_n(x) = -2 * L_0(x) + 2 * L_1(x) + 14 * L_2(x) + 23 * L_3(x)$$

IV Méthode de Lagrange : Expression de $P_n(x)$

x_i	0	2	4	5
$y_i = x^2 - 2$	-2	2	14	23

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$P_n(x) = -2 * L_0(x) + 2 * L_1(x) + 14 * L_2(x) + 23 * L_3(x)$$

$$\begin{cases} \{x^3 - 11x^2 + 38x - 40\} * \dfrac{2}{-40} \\ +\{x^3 - 9x^2 + 20x\} * \dfrac{2}{12} \\ +\{x^3 - 7x^2 + 10x\} * \dfrac{14}{-8} \\ +\{x^3 - 6x^2 + 8x\} * \dfrac{23}{15} \end{cases}$$

Faites le calcul on trouve x^2-2

Remarque : on peut obtenir le même résultat avec le tableau, il suffit de laisser x au lieu d'une valeur numérique ce qui permet d'avoir $\Phi(x)$...

V Méthode de Lagrange : Expression de $P_n(x)$ via $\Phi(x)$

$$L_k(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x_k)(x - x_k)}$$

x_i	0	2	4	5
$y_i = x^2 - 2$	-2	2	14	23

$$\Phi(x) = (x-0)(x-2)(x-4)(x-5) = (x^2 - 2x)(x^2 - 9x + 20)$$

$$\Phi(x) = x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 40x$$

Il faut calculer les Li(x)… $L_1(x) = \dfrac{\Phi(x)}{(x - x_1)\Phi'(x_1)} = \dfrac{\Phi(x)}{(x-2)\Phi'(2)}$

à l'aide de deux schémas de Horner :

$\Phi(x)$	$\Phi(2)$	$Phi'(2)$
$a_0 = 1$	$b_0 = a_0 = 1$	$c_0 = b_0 = 1$
$a_1 = -11$	$b_1 = 2 * b_0 + a_1 = 2 * 1 - 11 = -9$	$c_1 = 2 * c_0 + b_1 = 2 * 1 - 9 = -7$
$a_2 = 38$	$b_2 = 2 * -9 + 38 = 20$	$c_2 = 2 * -7 + 20 = 6$
$a_3 = -40$	$b_3 = 2 * 20 - 40 = 0$	$c_3 = 2 * 6 + 0 = 12$
$a_4 = 0$	$b_4 = 2 * 0 + 0 = 0$	$XXXX$

Soit :

$$L_1(x) = \frac{x^3 - 9x^2 + 20x}{12}$$