"Calcul Scientifique"

P. Castelan

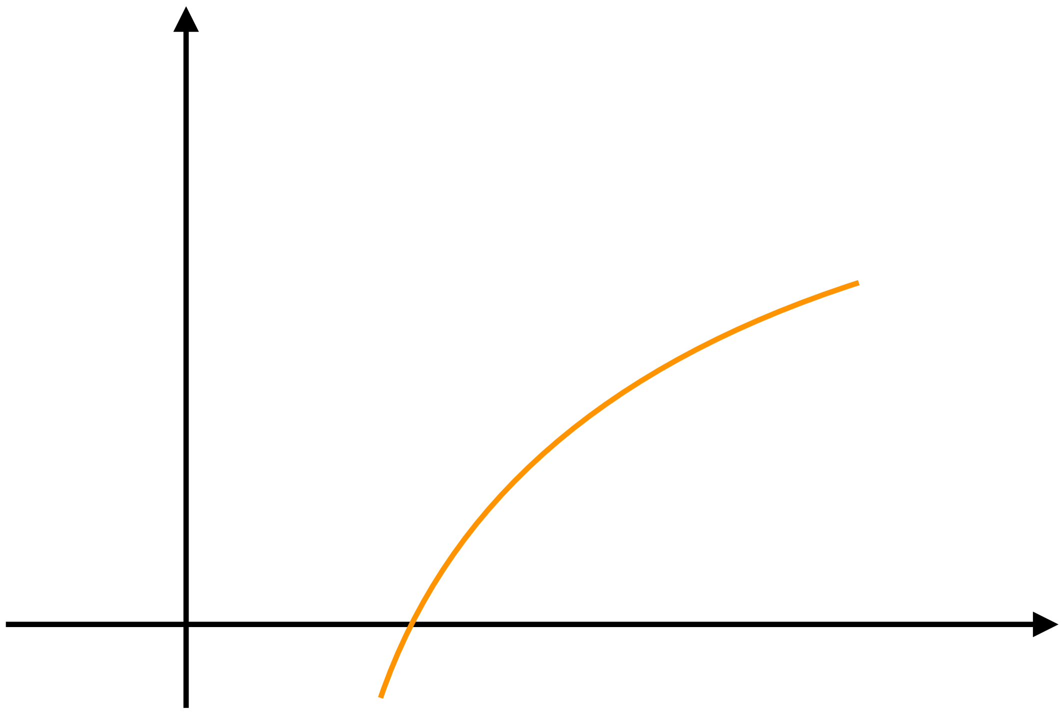
philippe.castelan@laplace.univ-tlse.fr

Objectifs

- ★ Intégration ?
- ★ Méthode des Trapèzes, Méthode de Simpson
- ★ Dérivation numérique

I Integration ?

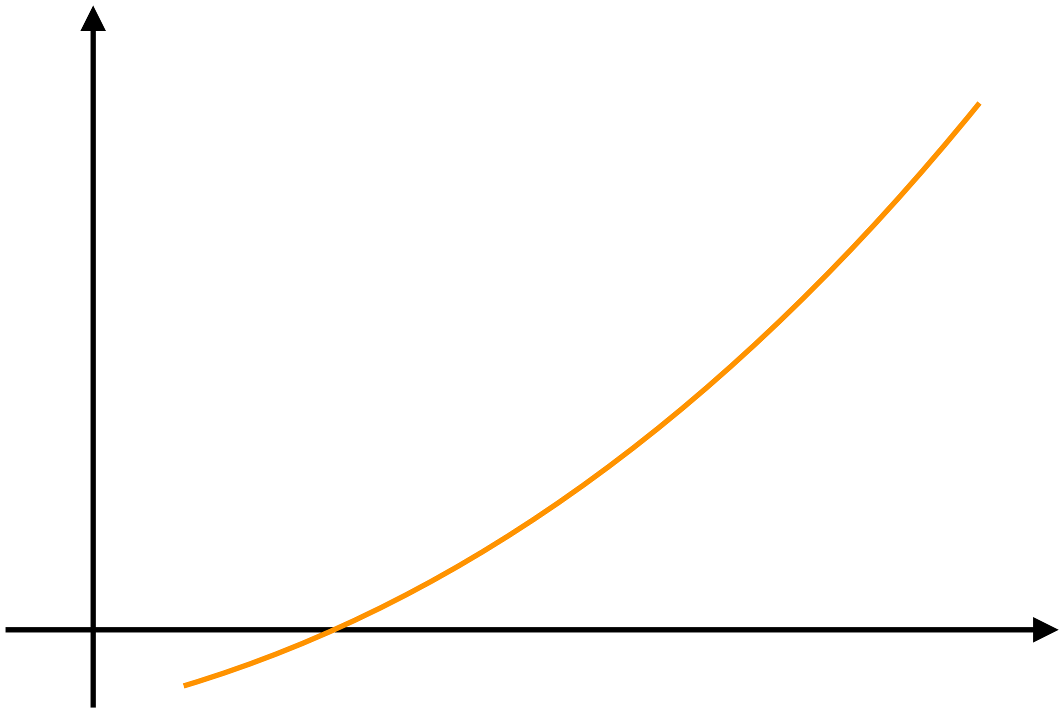
- Estimation de la valeur d'une intégrale : $I = \int_a^b f(x)dx$
- *f(x)* connue :
  - Par ses points
  - Par son expression => on échantillonne la fonction => retour au point 1
- La valeur de l'intégrale est confondue avec la surface sous la courbe…
- A-t-on vraiment besoin d'un ordinateur ?



I Integration ?

- Est-il possible de construire la primitive ?

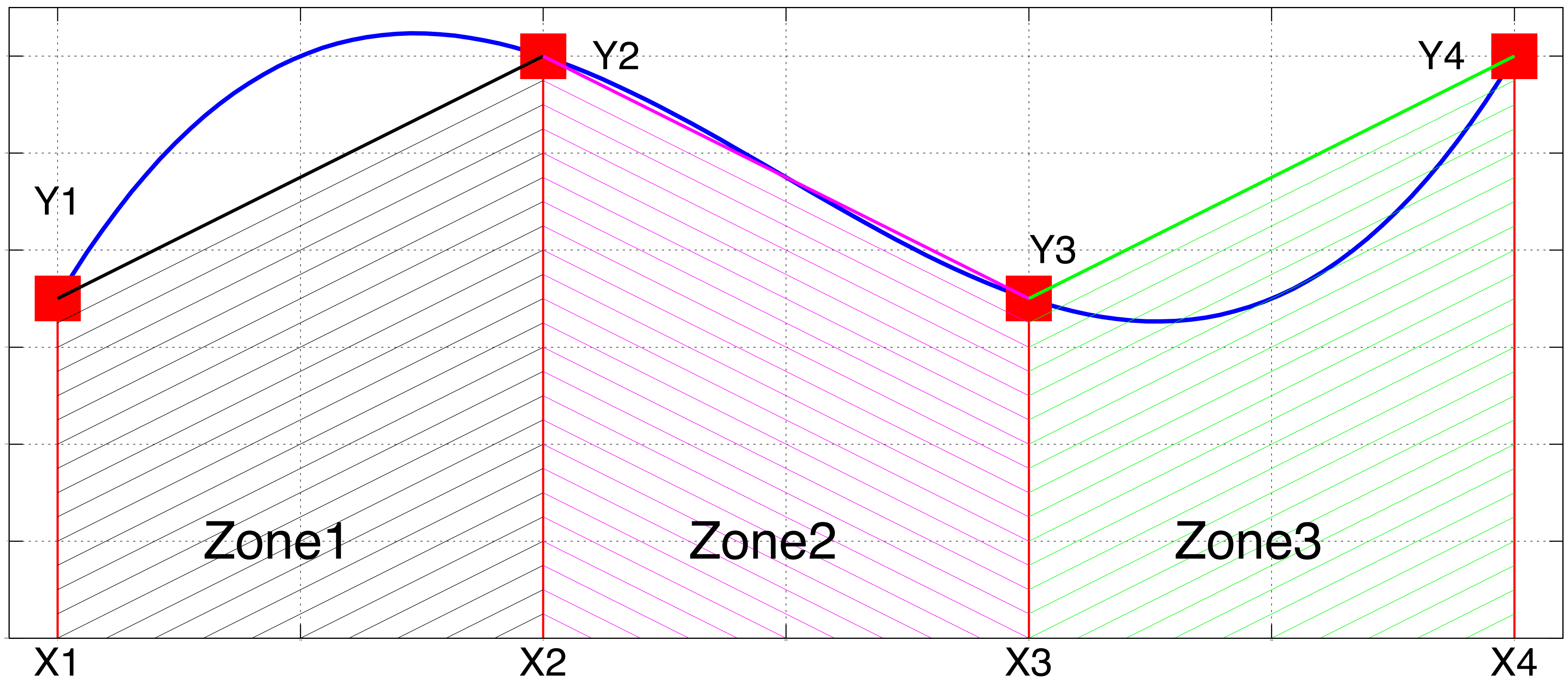
La valeur de la fonction primitive de *f(x)* est : $F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx$



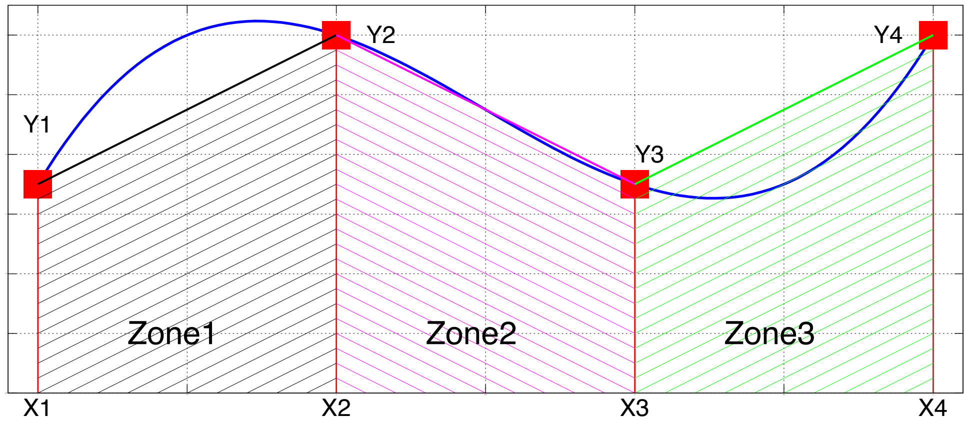
II Méthode des Trapèzes

Exemple avec4 points :

X	X_1	X_2	X_3	X_4
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4



II Méthode des Trapèzes



Expression à pas libre

Expression à pas constant

Erreur liée à l'approximation linéaire.

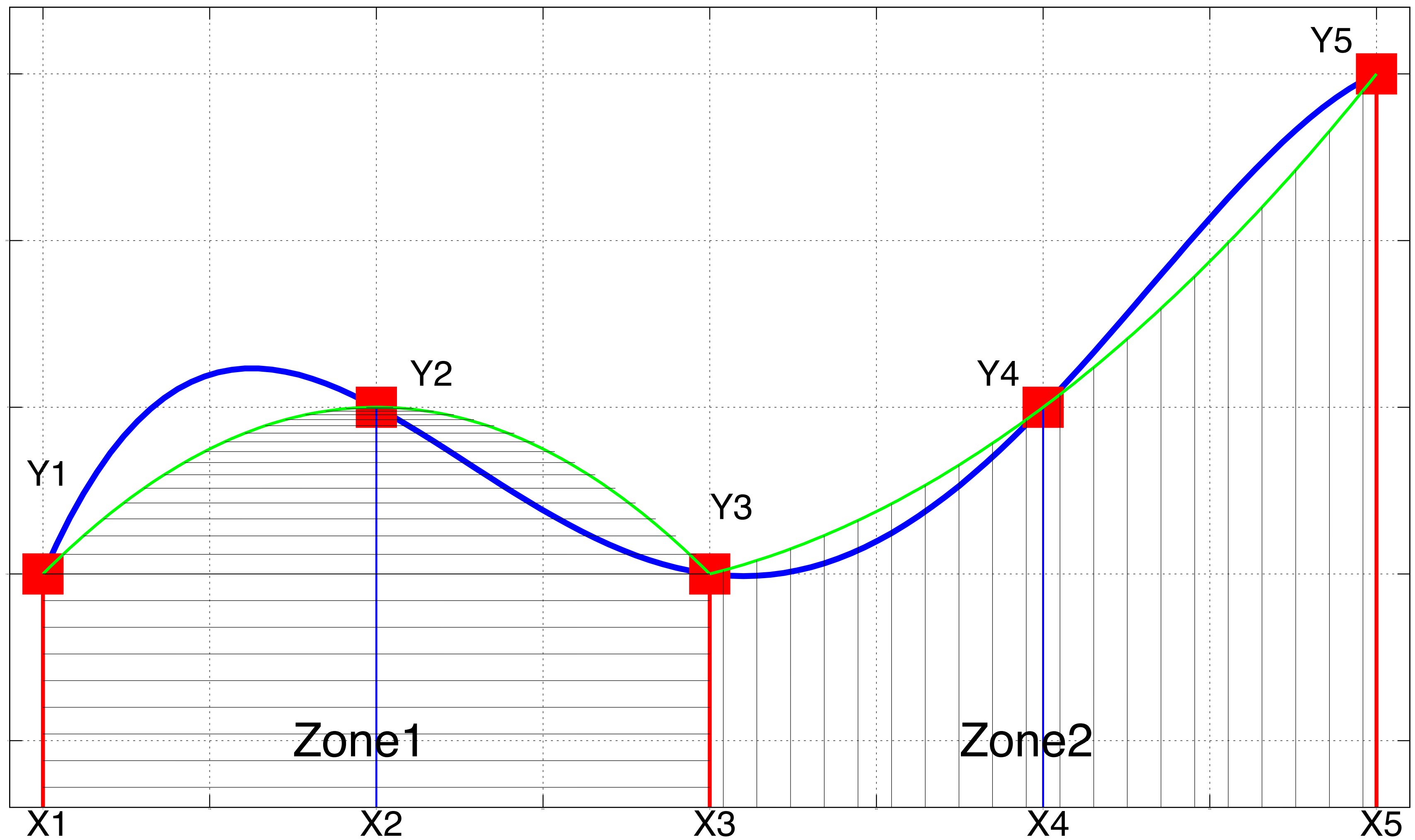
$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + y_n\right]$$

III Méthode de Simpson

Arcs de paraboles

Nbre de points…

Pas constant



$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n-1} y_k + 2\sum_{\substack{k=2 \\ k\ pair}}^{n-2} y_k\right]$$

IV Dérivation Numérique

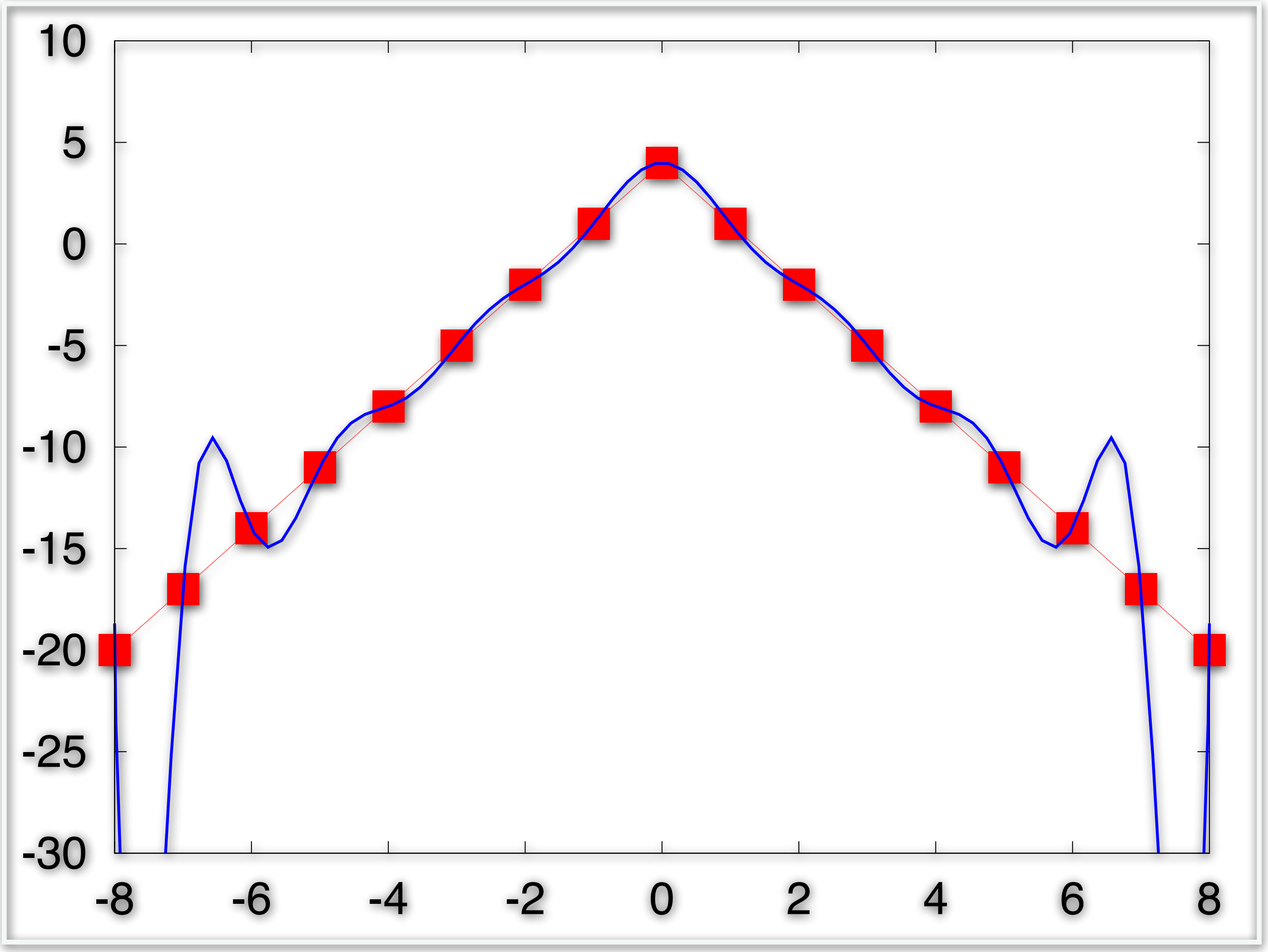
On a un ensemble de points, et l'on veut la dérivée sur ces points.

Analogie électronique :

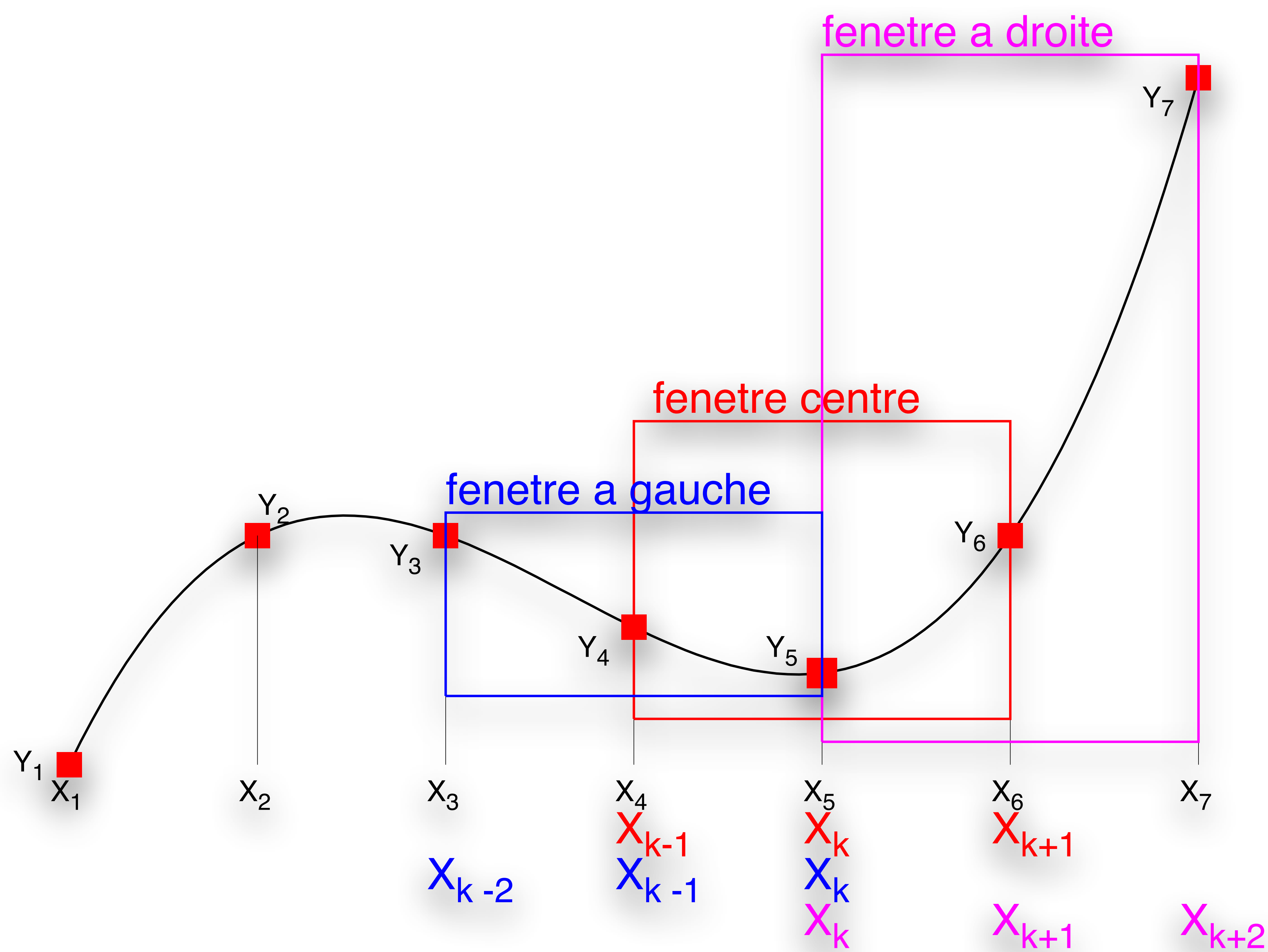
L'intégration stabilise, filtre les bruits, équivalent à un passe bas

La dérivation amplifie les bruits, accélère les variation équivalent à un passe haut.

Idée on dérive le polynôme d'interpolation, mais : "effet serpent"…



IV Dérivation numérique : notion de fenêtre



IV Dérivation numérique : fenêtre à 3 points

Fenêtre à gauche : $f'(x_k) \approx \dfrac{y_{k-2} - 4y_{k-1} + 3y_k}{2h}$

Fenêtre centrée : $f'(x_k) \approx \dfrac{-y_{k-1} + 3y_{k+1}}{2h}$

Fenêtre à gauche : $f'(x_k) \approx \dfrac{-3y_k + 4y_{k+1} - 3y_{k+2}}{2h}$

V Dérivation numérique : fenêtre à 5 points

Fenêtre à gauche : $f'(x_k) \approx \dfrac{1}{24h}\left[6y_{k-4} - 32y_{k-3} + 72y_{k-2} - 96y_{k-1} + 50y_k\right]$

Fenêtre centrée gauche : $f'(x_k) \approx \dfrac{1}{24h}\left[-2y_{k-3} + 12y_{k-2} - 36y_{k-1} + 20y_k + 6y_{k+1}\right]$

Fenêtre centrée : $f'(x_k) \approx \dfrac{1}{24h}\left[2y_{k-2} - 16y_{k-1} + 16y_{k+1} - 2y_{k+2}\right]$

Fenêtre centrée droite : $f'(x_k) \approx \dfrac{1}{24h}\left[-6y_{k-1} - 20y_k + 36y_{k+1} - 12y_{k+2} + 2y_{k+3}\right]$

Fenêtre droite : $f'(x_k) \approx \dfrac{1}{24h}\left[-50y_k + 96y_{k+1} - 72y_{k+2} + 32y_{k+3} - 6y_{k+4}\right]$