UNIVERSITÉ PAUL SABATIER — Année 2020–2021, juin 2021

L2 EEA/GC/MECA Mathématiques 2 - semestre 4 — Contrôle terminal 2ème session - 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Pas de téléphone portable. Les sacs sont rangés le long du mur. **Toute réponse doit être justifiée.**

Exercice 1. (5 points)
En utilisant des résultats de cours appropriés, justifier les affirmations suivantes

(a) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

(b) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

(c) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas absolument

(d) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{3^n}$ converge.

(e) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (10 points)
On considère $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-périodique, avec $f(x)=x$ sur $-\pi<x\leq\pi$.

(a) (1 point) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi,3\pi]$.

(b) (1 point) f est-elle continue, continue par morceaux ? Calculer $f(\pi^+)$, $f(\pi^-)$.

(c) (1 point) f est-elle de classe C^1, C^1_m ?

(d) (2 points) Démontrer que la série de Fourier de f

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)}$$

avec

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx,$$

est égale à

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=2(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots)$$

(*une intégration par parties sera nécessaire*)

(e) (2 points) Énoncer le théorème de Dirichlet pour une fonction 2π-périodique de classe C^1_m.

(f) (2 point) En déduire que la série de Fourier de f converge et calculer sa somme $F(x)$. Expliquer pourquoi $F(\pi)\neq f(\pi)$.

(g) (1 point) Démontrer, en utilisant la série de Fourier de f calculée au point $x=\pi/2$, que

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3. (7 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{1}$$

avec les conditions de bord et la condition initiale

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \forall t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = x, \ \forall x \in]0,\pi[. \tag{3}$$

Pour information, cette équation décrit la distribution de la température $u(x,t)$ dans une barre rigide de longueur π, chauffée à l'instant initial à x degrés en tout point $x \in]0,\pi[$, et dont les extrémités sont gardées ensuite à 0 degrés.

(a) (2 points) On suppose que $\varphi_n(t)$ est une fonction dérivable. Montrer que $\varphi_n(t)\sin(nx)$ satisfait l'équation de la chaleur (1), si et seulement si

$$\varphi_n'(t) = -n^2\varphi_n(t). \tag{4}$$

Calculer la solution générale $\varphi_n(t)$ de l'équation (4).

(b) (1 point) On admet que la série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin(nx).$$

ainsi que ses dérivées d'ordre un et deux convergent. Expliquer pourquoi $u(x,t)$ est une solution de l'équation de la chaleur.

(c) (3 points) On admet que $\varphi_n(t)$ sont des solutions particulières de (4), telles que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(0)\sin(nx) = x, 0 < x < \pi.$$

Montrer que

$$\varphi_1(t) = 2e^{-t}$$

puis calculer les fonctions $\varphi_n(t)$ pour tout $n > 1$.

(d) (1 point) Expliciter la température $u(\pi/2,t)$ au point milieu $x = \pi/2$ de la barre, sous forme de série.