Corrigé

Exercice 1. (5 points)

En utilisant des résultats de cours appropriés, justifier les affirmations suivantes

(1) La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

> La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, par conséquent la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

(2) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

> La suite $(\frac{1}{n})$ est décroissante et tend vers zéro. Par conséquent la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée, et donc elle converge.

(3) La série $\sum \frac{sin(n)}{n^2}$ converge absolument.

> La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann, voir plus haut. Or, $|\frac{sin(n)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum |\frac{sin(n)}{n^2}|$ est majorée par la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. On en déduite que $\sum |\frac{sin(n)}{n^2}|$ converge et donc $\sum \frac{sin(n)}{n^2}$ converge absolument. En particulier elle converge simplement.

(4) La série $\sum \frac{n^3}{3^n}$ converge.

> On pose $u_n = \frac{n^3}{3^n}$ Nous avons
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \times 3^n}{n^3 \times 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$$
> et d'après la règle du D'Alembert, la série converge.

(5) La série de fonctions $\sum_{n=1} \frac{cos(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

> Pour tout x, $|\cos(nx)| \leq 1$ et donc la série de fonctions $\sum_{n=1} |\frac{cos(nx)}{n^2}|$ est majorée par la série numérique convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ (série de Riemann). Par définition la série $\sum_{n=1} \frac{cos(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (7 points)

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, avec $f(x) = 1$ sur $]0, \pi[$.

(1) (1 point) Calculer $f(0), f(0^+), f(0^-)$. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$. f est-elle continue, continue par morceaux, de classe C^1, C^1_m ?

> Puisque la fonction f est impaire, alors $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. De plus $f(\pi) = -f(\pi)$ (f est impaire) et $f(\pi) = f(-\pi)$ (f est 2π-périodique). On en déduit $f(\pi) = f(-\pi) = 0$
> $$f(0^+) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1, f(0^-) = \lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -1.$$
> La fonction f est de classe C^0_m et C^1_m.

(2) (1 point) Démontrer que la série de Fourier de f

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

est égale à

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$$

Puisque f est impaire, alors $a_n = 0, \forall n$, et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\sin(nx)dx = |\frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0, \text{ si n=2k} \\ \frac{4}{\pi n}, \text{ si n=2k-1.} \end{cases}$$

Ainsi, la série de Fourier de f est égale à

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

(3) (2 points) Enoncer le théorème de Dirichlet pour une fonction 2π-périodique de classe C_m^1.

Soit f une fonction de classe C_m^1 et 2π périodique. Alors sa série de Fourier converge et la somme de la série est égale à

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

(4) (1 point) En déduire que la série de Fourier de f converge et calculer sa somme dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

La fonction f est de classe C_m^1 et d'après le Théorème de Dirichlet sa série de Fourier

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

converge. La somme de cette série est 1 si $0 < x < \pi$, -1 si $-\pi < x < 0$, 0 si $x = 0, \pm\pi$.

(5) (1 point) Si $x = \pi$ la somme de la série est-elle égale à $f(\pi)$, et expliquer pourquoi.

$f(\pi) = 0$ et la somme de la série au point $x = \pi$ est égale à

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

(6) (1 point) Démontrer que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

On pose $x = \pi/2$, on obtient

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2})}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

d'où le résultat.

Exercice 3. (8 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

avec les conditions de bord

(2) $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \forall t \geq 0, \text{ et la condition initiale } u(x,0) = 1, \ \forall x \in]0,\pi[.$$

Pour information, cette équation décrit la distribution de la temperature $u(x,t)$ dans une barre rigide de longueur π, chauffée à l'instant initial à 1 degré en tout point $x \in [0,\pi]$, et dont les extrémités sont gardées ensuite à 0 degrés.

(1) (2 points) Calculer toutes les fonctions $\varphi_n(t)$ de classe C^2 telles que

$$u(x,t) = \varphi_n(t)\sin(nx)$$

est une solution de (1).

> On substitue $u(x,t)$ dans l'équation de la chaleur et on obtient
> $$\varphi_n'(t)\sin(nx) = \varphi_n(t)(\sin(nx))'' = -n^2\varphi_n(t)\sin(nx)$$
> $$\Leftrightarrow$$
> $$\varphi_n'(t) = -n^2\varphi_n(t)$$
> La solution générale de cette équation différentielle linéaire pour φ_n est
> $$\varphi_n(t) = a_n e^{-n^2 t}$$

(2) (3 points) En déduire la solution de l'équation de la chaleur (1) avec les conditions (2) sous forme de série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin(nx).$$

Expliciter $\varphi_n(t)$, $n = 1,\ldots,5$, puis démontrer que la suite $(\varphi_n(t))_n$ est décroissante pour tout $t \geq 0$.

> D'après le principe de superposition la somme
> $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$
> est solution de l'équation de la chaleur. Cette solution formelle satisfait les conditions
> $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$
> La condition $u(x,0) = x$ impose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ converge vers x. Ainsi, nous pouvons choisir pour a_n les coefficient de Fourier de la fonction $f(x)$ de l'**Exercice 2.**, c'est à dire
> $$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)} \Leftrightarrow \varphi_{2k}(t) = 0, \varphi_{2k-1}(t) = \frac{4}{\pi}\frac{e^{-n^2 t}}{2k-1}.$$
> La suite des fonctions $(e^{-n^2 t})$ est décroissante et la suite numérique $(1/(2k-1))$ est strictement décroissante. Ainsi la suite des fonctions $(\varphi_{2k-1}(t))$, $t \geq 0$ est décroissante.

(3) (3 points) Dans cette dernière question, nous allons étudier la temperature $u(\pi/2,t)$ au point milieu $x = \pi/2$ de la barre.

Montrer que

$$0 < \varphi_1(t) - \varphi_3(t) + \varphi_5(t) < \varphi_1(t), \text{ pour } t \geq 0$$

et que, plus généralement

$$0 < u(\pi/2,t) < \varphi_1(t) = \frac{4}{\pi}e^{-t}, \text{ pour } t \geq 0.$$

Indication : utiliser le fait que la série

$$u(\frac{\pi}{2},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin(n\frac{\pi}{2}).$$

est alternée.

En déduire la limite $\lim_{t\to\infty} u(\pi/2, t)$.

Puisque $\varphi_1(t) > \varphi_3(t) > \varphi_5(t) > 0$ alors

$$(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) + \varphi_5(t) > 0$$
$$\varphi_1(t) + (-\varphi_3(t)) + \varphi_5(t)) < \varphi_1(t).$$

d'où

$$0 < \varphi_1(t) - \varphi_3(t) + \varphi_5(t) < \varphi_1(t), \text{ pour } t \geq 0.$$

D'une manière semblable on montre que

$$0 < \varphi_1(t) - \varphi_3(t) + \varphi_5(t) - \varphi_7(t) + \cdots < \varphi_1(t), \text{ pour } t \geq 0$$

est ceci est en effet une propriété de toute série alternée. On en déduit que

$$0 < u(\frac{\pi}{2}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k-1}(t) \sin((2k-1)\frac{\pi}{2}) < \varphi_1(t) = \frac{4}{\pi} e^{-t}.$$

Cette inégalité montre que la temperature $u(\frac{\pi}{2}, t)$ au au point milieu $x = \pi/2$ de la barre tend vers 0 de manière exponentielle, lorsque t tend vers infini.