UNIVERSITÉ PAUL SABATIER — Année 2020–2021, mai 2021
L2 EEA/GC/MECA Mathématiques 2 - semestre 4 — Contrôle terminal - 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Pas de téléphone portable. Les sacs sont rangés le long du mur. **Toute réponse doit être justifiée.**

Exercice 1. (5 points)

En utilisant des résultats de cours appropriés, justifier les affirmations suivantes

(1) La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

(2) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

(3) La série $\sum \frac{sin(n)}{n^2}$ converge absolument.

(4) La série $\sum \frac{n^3}{3^n}$ converge.

(5) La série de fonctions $\sum_{n=1} \frac{cos(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (7 points)

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, avec $f(x) = 1$ sur $]0, \pi]$.

(1) (1 point) Calculer $f(0), f(0^+), f(0^-)$. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$. f est-elle continue, continue par morceaux, de classe C^1, C^1_m ?

(2) (1 point) Démontrer que la série de Fourier de f

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

est égale à

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$$

(3) (2 points) Enoncer le théorème de Dirichlet pour une fonction 2π-périodique de classe C^1_m.

(4) (1 point) En déduire que la série de Fourier de f converge et calculer sa somme dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

(5) (1 point) Si $x = \pi$ la somme de la série est-elle égale à $f(\pi)$, et expliquer pourquoi.

(6) (1 point) Démontrer que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3. (8 points)
Le but de cet exercice est d'étudier la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

avec les conditions de bord

(2) $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \forall t \geq 0, \text{ et la condition initiale } u(x,0) = 1, \ \forall x \in]0,\pi[.$$

Pour information, cette équation décrit la distribution de la temperature $u(x,t)$ dans une barre rigide de longueur π, chauffée à l'instant initial à 1 degré en tout point $x \in [0,\pi]$, et dont les extrémités sont gardées ensuite à 0 degrés.

(1) (2 points) Calculer toutes les fonctions $\varphi_n(t)$ de classe C^2 telles que
$$u(x,t) = \varphi_n(t)\sin(nx)$$
est une solution de (1).

(2) (3 points) En déduire la solution de l'équation de la chaleur (1) avec les conditions (2) sous forme de série
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin(nx).$$
Expliciter $\varphi_n(t)$, $n = 1,\ldots,5$, puis démontrer que la suite $(\varphi_n(t))_n$ est décroissante pour tout $t \geq 0$.

(3) (3 points) Dans cette dernière question, nous allons étudier la temperature $u(\pi/2,t)$ au point milieu $x = \pi/2$ de la barre.

Montrer que
$$0 < \varphi_1(t) - \varphi_3(t) + \varphi_5(t) < \varphi_1(t), \text{ pour } t \geq 0$$
et que, plus généralement
$$0 < u(\pi/2,t) < \varphi_1(t) = \frac{4}{\pi}e^{-t}, \text{ pour } t \geq 0.$$
Indication : utiliser le fait que la série
$$u(\frac{\pi}{2},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin(n\frac{\pi}{2}).$$
est alternée.

En déduire la limite $\lim_{t\to\infty} u(\pi/2,t)$.