Exercice 1 : La fonction $G(x,y) = e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)$ est C^2. On a :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\alpha\ G(x,y), \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = -\alpha e^{-\alpha x}\sin(\alpha y),$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \alpha^2\ G(x,y), \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\alpha^2 G(x,y).$$

Donc $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$.

Exercice 2 : Equation des ondes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(1) Soit u_1 et u_2 deux solutions. Notons $v = u_1 + u_2$. On a $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}$, et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$. De même $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$ donc

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \alpha\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \alpha\ \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = \alpha\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

donc v est solution.

(2) Soit $u_1 = \frac{1}{2}\left(f(x+\alpha t) + f(x-\alpha t)\right)$. Alors :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\alpha f'(x+\alpha t) - \alpha f'(x-\alpha t)\right)$$
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 f''(x+\alpha t) + \alpha^2 f''(x-\alpha t)\right) = \frac{\alpha^2}{2}\left(f''(x+\alpha t) + f''(x-\alpha t)\right).$$

De même

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(f'(x+\alpha t) + f'(x-\alpha t)\right)$$
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(f''(x+\alpha t) + f''(x-\alpha t)\right)$$

Ainsi $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, donc u_1 est solution.

De plus $u_1(x,0) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) = f(x)$ et $\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \frac{\alpha}{2}\left(f'(x+0) - f'(x-0)\right) = 0$

(3) Soit $u_2 = \frac{1}{2}\left(G(x+\alpha t) - G(x-\alpha t)\right)$ (avec G primitive d'une fonction g donnée). Alors :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\alpha G'(x+\alpha t) + \alpha G'(x-\alpha t)\right) = \frac{\alpha}{2}\left(g(x+\alpha t) + g'(x-\alpha t)\right)$$
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\alpha^2}{2}\left(g'(x+\alpha t) - g'(x-\alpha t)\right).$$

De même

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(G'(x+\alpha t) - G'(x-\alpha t)\right) = \frac{1}{2}\left(g(x+\alpha t) - g(x-\alpha t)\right)$$
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(g'(x+\alpha t) - g'(x-\alpha t)\right)$$

Ainsi $\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$, donc u_2 est solution.

De plus $u_2(x,0) = \frac{1}{2}\left(G(x+0) - G(x-0)\right) = 0$ et $\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \frac{\alpha}{2}\left(g(x+0) + g(x-0)\right) = g(x)$.

(4) une primitve de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est $G(x) = \arctan(x)$. Posons

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{x+\alpha t}\sin(x+\alpha t) + e^{x-\alpha t}\sin(x-\alpha t)\right)$$

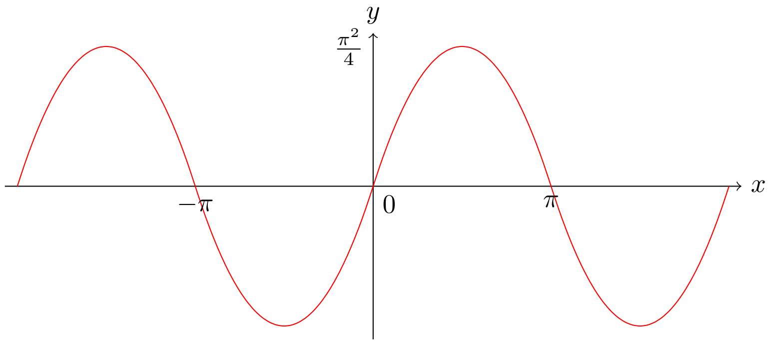
et

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left(\arctan(x+\alpha t) - \arctan(x-\alpha t)\right)$$

Alors $u := v + w$ est solution et vérifie $u(x,0) = e^x\sin(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 3 :

(1)



(2) f est au moins C^1 par morceaux car sur chaque interval $[k\pi, (k+1)\pi]$, elle est la restriction d'une fonction C^∞. On voit en plus qu'elle est C^0 (tout court, pas par morceaux), car sa limite à droite et à gauche en chaque $k\pi$ est la même, à savoir 0. On pourrait montrer que f est en fait C^1 (tout court, pas par morceaux).

(3) Comme f est impaire, les coefficients de Fourier a_n sont tous nuls pour $n \geq 0$.

(4) Pour $n > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x(\pi - x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (\pi - 2x)\frac{-\cos(nx)}{n}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 + \int_0^\pi (\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-2)\frac{\sin(nx)}{n^2}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 + 2\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^2}dx\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n^3}dx\right]_0^\pi \\
&= \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

Ainsi $b_{2n} = 0$, et $b_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^3}$.

(5) f est continue donc de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$, donc par le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\geq 1} b_n^2.$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} - 2\pi\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2\pi^5}{\pi}\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right] \\
&= \frac{\pi^4}{15}
\end{aligned}$$

et $\sum_{n\geq 1} b_n^2 = \sum_{n\geq 0} b_{2n+1}^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{8^2}{\pi^2(2n+1)^6}$. Ainsi, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^4}{15}\frac{\pi^2}{8^2} = \frac{\pi^6}{15*2^6}$.

Enfin, soit $S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k)^6} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^6} \\ &= \frac{1}{2^6} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^6} + \frac{\pi^6}{15 * 2^6} \\ &= \frac{1}{2^6} S + \frac{\pi^6}{15 * 2^6} \end{aligned}$$

Donc $(1 - \frac{1}{2^6})S = \frac{\pi^6}{15*2^6}$, d'où $S = \frac{\pi^6}{15*(2^6-1)} = \frac{\pi^6}{945}$.

(6) $\sin(k\pi + \pi/2) = (-1)^k$.

(7) f set C^1 donc sa série de Fourier converge normalement vers f donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx)$. En particulier, pour $x = \pi/2$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} &= \sum_{n\geq 0} b_{2n+1} \sin((2n+1)\pi/2) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} (-1)^n \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \end{aligned}$$

On a donc $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \ \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{32}$.

Exercice 3 : Voir le cours...