UPS -FSI **2018-2019**

Controle Terminal MATHS 2 – 30 Avril 2019
L2-EEA-GC-MECA

Durant l 'examen , tout appareil électronique est interdit (calculette, téléphone) . Y compris eteint

EXERCICE 1: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.On considère G définie par $G(x,y) = e^{-\alpha x} \cdot \cos(\alpha y)$

Calculer $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$; $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)$; $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y)$; $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y)$

En deduire : $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y)$

EXERCICE 2: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère (E) l' Equation des Ondes .

C 'est à dire : $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$ ou $U \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

1- Montrer que la somme de 2 solutions de (E) est une solution de (E)

2- Soit f $\in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Montrer que U_1 définie par $U_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t) + f(x-\alpha t) \right]$

est solution de (E) et vérifie en plus : $U_1(x,0) = f(x)$ $\frac{\partial U_1}{\partial t}(x,0) = 0$

3- Soit g $\in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et G une primitive de g , (C' est à dire vérifiant $G' = g$)

Montrer que U_2 définie par $U_2(x,t) = \frac{1}{2\alpha} \cdot \left[G(x+\alpha t) - G(x-\alpha t) \right]$

est solution de (E) et verifie en plus : $U_2(x,0) = 0$ $\frac{\partial U_2}{\partial t}(x,0) = g(x)$

4 - Déduire des résultats des questions 1,2 et 3 une solution U de (E) verifiant les conditions suivantes : $U(x,0) = e^{x} \cdot \sin(x)$ $\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$

EXERCICE 2 : Soit f $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par les 3 propriétés suivantes

(1) $f(x) = x \cdot [\pi - x]$ pour $x \in [0, \pi]$
(2) f est impaire
(3) f est 2π – periodique

1- Tracer avec soin le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$

2- f est -elle continue ? f est-elle C^1 ? f est-elle C^1 par morceaux ?

4-Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ pour $n \geqslant 0$

5- Montrer à l'aide de 2 integrations par parties que pour n > 0

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi n^2} \cdot \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$$

En deduire que pour $k \in \mathbb{N}$ les valeurs de $b_{2k}(f)$ et $b_{2k+1}(f)$

6-En appliquant l 'identité de Parseval à f (On justifiera sur son utlisation)

Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$ puis en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$

7- Laquelle de ces formules est valables (faire un cercle trigonometrique)

$$\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \; ; \; \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \; ; \; \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

8- En appliquant le Théorème de Dirichlet à f (On en justifera son utilisation)

et en prenant la valeur $x = \frac{\pi}{2}$ calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

EXERCICE 3 : On considère $U \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ verifiant l 'Equation de Laplace avec "conditions aux bords ":

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$(2) \quad U(x,0) = 0 \text{ et } U(0,y) = 0$$

On se propose de trouver par la méthode de " Séparation des variables " une famille de solutions de (1) et (2).

On suppose que U *n' est pas la fonction nulle* et est de la forme

1- Expliquer pourquoi necessairement $A(0) = 0$ et $B(0) = 0 \quad (*)$

2- Montrer que si U verifie les conditions (1) et (2)

alors il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(3) \quad A''(x) - K A(x) = 0$$

$$(4) \quad B''(x) + K B(x) = 0$$

On ne considère ici que les $K>0$: Montrer par l 'étude des conditions (3), (4) et $(*)$ que l 'on obtient les fonctions U_K definies par $U_K(x,y) = \sin(\sqrt{K}y).\left[e^{\sqrt{K}x} - e^{-\sqrt{K}x}\right]$

Verifier par le calcul (entre autre de de leurs derivées partielles) que les U_k sont solutions de (1) et (2) .