UNIVERSITé PAUL SABATIER — Année 2021–2022, mars 2022

L2 EEA/GC/MECA Mathématiques 2 semestre 4 — Contrôle partiel 2 heures

---

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Pas de téléphone portable ; les sacs sont rangés le long du mur. **Toute réponse doit être justifiée.**

(1) (2 points) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique.

(a) Que signifie l'expression "La série $\sum u_n$ converge" ?

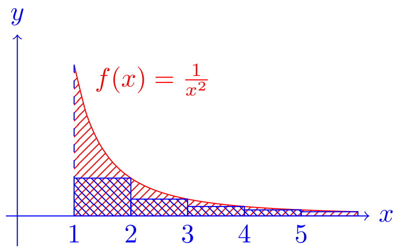
La série $\sum u_n$ converge signifie que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_n$ existe.

(b) On admet que $\sum u_n$ converge et soit S (notée $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$) la somme de cette série. Donner la définition de S.

$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_n$

(2) (2 points) On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

(a) Justifiez graphiquement que $\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^2}$.



(b) En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, et que sa somme S est majorée par 2.

On ne suppose pas connu dans cette exercice le résultat sur les séries de type de Riemann.

$\sum_{k=1}^{n} 1/n^2 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^2} = [\frac{-1}{t}]_1^{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1.$

La suite des sommes partielles est croissante et majorée, donc convergente.

(3) (6 points)

Etudier la nature (convergence , divergence) des séries

— $\sum \frac{n+1}{n^2+1}$ est une série à termes positifs et $u_n = \frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2}\,\frac{1+1/n}{1+1/n^2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$. Ainsi $u_n \sim \frac{1}{n}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

— $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$: soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. On a $|u_n| = \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{1+1/n^2}$, donc $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

— $\sum \frac{(n+1)^n}{(n^2+1)^n}$: soit $u_n = \frac{(n+1)^n}{(n^2+1)^n}$. On a $u_n > 0$ et $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n+1}{n^2+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$. Comme $0 < 1$, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

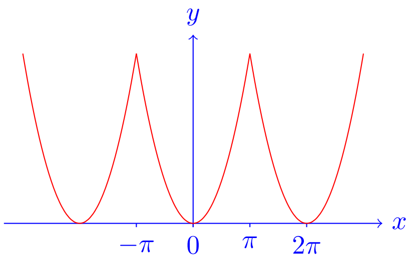
— $\sum \frac{n^2+1}{2^n}$: soit $u_n = \frac{n^2+1}{2^n}$. On a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)^2+1)2^n}{(n^2+1)2^{n+1}} = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\,\frac{1}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} < 1$, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

— $\sum \frac{cos(n^3)}{n^2}$: soit $u_n = \frac{cos(n^3)}{n^2}$. On a $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

— $\sum (-1)^n \frac{\sin(n+1)}{n^2}$: soit $u_n = (-1)^n \frac{\sin(n+1)}{n^2}$. On a $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

(4) (12 points) On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, avec $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

(a) Tracer, avec soin, le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. f est-elle continue, continue par morceaux ?



(b) f est-elle de classe C^1, C^1_m ?
f est continue et C^1_m, mais pas C^1.
Calculer les dérivées à droite $f'(\pi^+)$ et à gauche $f'(\pi^-)$.
Pour $x \in [0, \pi]$, on a $f(x) = x^2$, donc $f'(x) = 2x$ et $f'(\pi^-) = 2\pi$.
Pour $x \in [\pi, 2\pi]$, on a $f(x) = f(x - 2\pi)$, donc $f'(x) = 2(x - 2\pi)$ et $f'(\pi^+) = -2\pi$.
Soient

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,}$$

les coefficients de Fourier de f.

(c) La fonction f est-elle paire, impaire, ni l'un ni l'autre ? Calculer a_0, puis b_n, $n \geq 1$.
La fonction f est paire, donc $\forall n \geq 1, b_n = 0$. Pour $n = 0$, on a :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

(d) Montrer par deux intégrations par parties, que

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\frac{-\sin(nx)}{n}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[2x\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\frac{\cos(nx)}{n^2}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \left[2\frac{\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{(-1)^n}{n^2} - 0\right) \\
&= (-1)^n\frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

(e) Enoncer le Théorème de Dirichlet, puis justifiez que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Dirichlet (version 2) : Si une fonction f est continue et C^1 par morceaux, alors sa série de Fourrier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $f(x)$ est la somme de la série de Fourier, et donc ici, pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a :

$$f(x) = x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(f) En déduire la somme de la série numériques

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pour $x = \pi$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}$.