UNIVERSITé PAUL SABATIER — Année 2020–2021, mars 2021

L2 EEA/GC/MECA Mathématiques 2 semestre 4 — Contrôle partiel 2 heures

---

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Pas de téléphone portable ; les sacs sont rangés le long du mur. **Toute réponse doit être justifiée.**

(1) (3 points)

(a) Que signifie l'expression "La série $\sum u_n$ converge" ?

(b) On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Etablir une inégalité entre S_n et $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$. Justifier votre réponse graphiquement.

(c) **En déduire** la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n}$.

(2) (3 points)

(a) Montrer que si $|x| \geq 1$, la série $\sum x^n$ diverge.

(b) Montrer que si $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ converge, puis calculer sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
Indication : on utilisera l'identité $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$.

(c) Montrer que $1,111\cdots = 10/9$.

(3) (4 points)

Etudier la nature (convergence, divergence) des séries

$$\sum \frac{cos(n)}{n^2},\ \sum \frac{(-1)^n}{n^{1/3}},\ \sum \frac{1}{n^{1/3}}, \sum \frac{n}{2^n}.$$

(4) (12 points) On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, avec $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

(a) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. f est-elle continue, continue par morceaux ?

(b) f est-elle de classe C^1, C^1_m ? Calculer les dérivées $f'(0^+)$ et $f'(0^-)$.
Soient

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,}$$

les coefficients de Fourier de f.

(c) La fonction f est-elle paire, impaire, ni l'un ni l'autre ? Calculer a_0, puis b_n, $n \geq 1$.

(d) Montrer par une intégration par parties, que

$$a_{2k} = 0, a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2},\quad k \geq 1.$$

(e) Enoncer le Théorème de Dirichlet, puis justifiez que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

(f) En déduire la somme des séries numériques

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$