UPS-FSI **2019-2020**

CC de Maths 2 . L2 -EEA GC -MECA
Lundi 9 Mars 2020 -15h45-17h45
Les téléphones et les calculatrices doivent rester dans les sacs .

Exercice 1: Soit $(u_n)_{n\geq 1}$, une suite definie pour $n \geq 1$

1) Que signifie l'expression " La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ?

2) Qu'appelle -t -on dans ce cas , la somme de la série ? (Notée $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$)

3) *<u>On ne suppose pas connu dans cet exercice , le résultat sur les series de type Riemann.</u>*

<u>Il faut justement le redémontrer</u>). En utlisant un théorème classique sur les suites et une majoration par une integrale montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Exercice 2 : Etudiez la nature des séries suivantes (convergence ou divergence)

<u>Ici on peut utiliser , sans les redémontrer , tous les théorèmes classiques sur les series , en les citant clairement et après en avoir vérifiées les hypotheses : Series de type Riemann ,Théorème de comparaison sur les series à termes positifs , théorème d 'absolue convergence, théorème des series alternées, critère de d 'Alembert , extera</u>

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n^2)}{n^3} \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 . \ln(n)} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} . \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\sum \frac{2^n}{n!} \qquad \sum (-1)^n \frac{\sin(n+3)}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n . \ln(n)}$$

Exercice 3: On considère pour tout $n \geq 1$, $u_n]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{x}{n} . e^{-nx}$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $]0,+\infty[$

(On pourra pour cela étudier les variations des u_n sur $]0,+\infty[$

2) Que peut-on alors en déduire, comme propriété , sur la somme de la série de fonctions

Exercice 4 :

On considère la fonction $f \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- periodique , définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = x^2 + 1$

1) Tracer , avec soin , le graphe de f sur l' intervalle $[-3\pi, 3\pi]$

2) f est elle continue par morceaux ? Continue ? C par morceaux ? C ? .Justifier les réponses

4) Calculer pour tout $n \geqslant 1$, les coeficients de Fourier $b_n(f)$ par un argument simple .

5) Calculer $a_0(f)$, puis , montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, les coeffficients de Fourier $a_n(f)$ sont donnés par l 'expression suivante : $a_n(f) = (-1)^n \dfrac{4}{n^2}$

7) Enoncer précisément le Theorème sur la Formule de Parseval ,vu en cours

Justifier qu'il s 'applique à f.

En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Puis à partir de la précédente calculer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$

8) Enoncer avec précision le Theorème de Dirichlet , vu en cours . Justifier qu'il s 'applique à f

En déduire que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$: $\displaystyle x^2+1 = \frac{\pi^2}{3} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cdot \cos(nx)$

8) En utilisant la formule précedente pour $x=0$ et $x=\pi$ déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Question de cours N°1 : On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et 2π - periodique

1) Expliquer pourquoi f est bornée sur $\mathbb{R}$.(C 'est à dire qu' il existe $M \geqslant 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \ |f(x)| \leqslant M$]

2) On suppose maintenant que f est la somme de sa serie de Fourier , c' est à dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

(Ou $a_n(f)$ et $b_n(f)$ designent les coefficients de Fourier et f).

et on suppose , en plus , que : $\sum |a_n(f)|$. et $\sum |b_n(f)|$ convergent.

En déduire ,en utilisant le résultat de la question 1) et un théorème de convergence normale , une démonstation de la formule de Parseval .

Question de cours N°2 : On considère 2 fonctions continues, 2π – Periodiques ,f et g .

(f et g ne sont donc pas ici , obligatoirement sommes de leurs series de Fourier).

Montrer que si f et g ont les mêmes coeficients de Fourier , alors elles sont égales .