UNIVERSITE PAUL SABATIER **Année universitaire 2020 – 2021**
L2 SPI/EEA **Mai 2021**

ELECTROMAGNETISME

(Durée 2 heures –calculatrice autorisée)

Exercice I : Propagation libre d'une onde plane (environ 14 pts)

On considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale, de pulsation ω se propageant dans le vide. Le champ ~~magnétique~~ électrique de l'onde a pour expression complexe : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp j(\omega t - ax - by)\vec{e}_z$ où a et b sont des constantes positives (a = b = 200 m^{-1}).

1°) Précisez la direction de polarisation de cette onde.

2°) Préciser la direction de propagation de cette onde.

3°) Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de a et b. En déduire l'expression du module $\| \vec{k} \|$ du vecteur d'onde. Calculer sa valeur numérique.

4°) **a)** Donner l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de a et de b. calculer la valeur de la longueur d'onde λ.

b) En déduire la fréquence f de l'onde en fonction de a et de b. Donner la valeur de f.

5°) Donner les expressions des 4 équations de Maxwell dans le vide.

6°) A partir des équations de Maxwell, établir l'équation de propagation des ondes dans le vide (sur le champ E ou le champ B au choix).

7°) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer les composantes du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ de cette onde.

8°) Représenter clairement sur une figure les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ainsi que le vecteur d'onde $\vec{k}$ (cette question est indépendante des questions précédentes).

9°) **a)** Rappeler la définition du vecteur de Poynting $\vec{R}$.

b) Préciser sa direction et son sens.

c) Calculer les composantes du vecteur de Poynting

d) Calculer le module R du vecteur de Poynting.

e) Calculer la valeur moyenne <R> du module du vecteur de Poynting.

f) En déduire la puissance moyenne P(W) transportée par l'onde à travers l'unité de surface du plan d'onde (1m^2).

Exercice II (environ 6 pts)

Un conducteur métallique de conductivité électrique $\gamma = 6.10^7\, S.m^{-1}$ et de permittivité diélectrique $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\, F.m^{-1}$ est le siège d'un champ électrique sinusoïdal de fréquence ν = 1 GHz dont l'expression complexe est : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_m \exp(j\omega t)$.

1) Donner la relation reliant ε_0 (permittivité diélectrique du vide), μ_0 (perméabilité magnétique du vide) et c (célérité de la lumière).

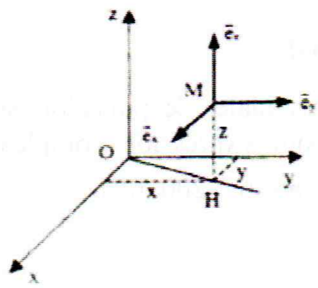
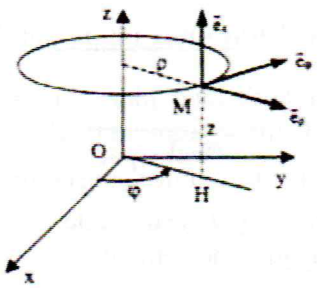
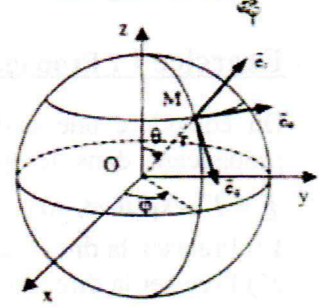
2) Donner l'expression du vecteur densité de courant de conduction $\overrightarrow{J_C}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$.

3) Donner l'expression du vecteur densité de courant de déplacement $\overrightarrow{J_D}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$ et donner son expression en notation complexe.

4) Exprimer le rapport des modules $\|\vec{J}_C\| / \|\vec{J}_D\|$ en fonction de ω, ε_0 et γ. Conclure.

5) Pour quelle fréquence ν les modules des vecteurs $\vec{J}_C$ et $\vec{J}_D$ sont-ils du même ordre de grandeur ? (On supposera que γ est indépendante de la fréquence).

SYSTEMES DE COORDONNEES

Cartésiennes (x,y,z)	*Cylindriques (ρ,φ,z)*	*Sphériques (r,θ,φ)*
Base locale : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	Base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$	Base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$
		
Position :	*Position :*	*Position :*
$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$	$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$	$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{e}_r$
Déplacement élémentaire :	*Déplacement élémentaire :*	*Déplacement élémentaire :*
$\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$	$\overrightarrow{dl} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z$	$\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$
Surfaces élémentaires :	*Surfaces élémentaires :*	*Surfaces élémentaires :*
$dS_x = dy\,dz \quad dS_y = dx\,dz \quad dS_z = dx\,dy$	$dS_\rho = \rho\,d\varphi\,dz$; $dS_\varphi = d\rho\,dz$; $dS_z = \rho\,d\rho\,d\varphi$	$dS_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$; $dS_\theta = r\sin\theta\,dr\,d\varphi$; $dS_\varphi = r\,dr\,d\theta$
Volume élémentaire :	*Volume élémentaire :*	*Volume élémentaire :*
$d\tau = dx\,dy\,dz$	$d\tau = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$	$d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

OPERATEURS DIFFERENTIELS - FORMULAIRE

Cartésiennes (x,y,z)	*Cylindriques (,φρ,z)*	*Sphériques (r,θ,φ)*
$\overrightarrow{grad}\,f = \vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\overrightarrow{grad}\,f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\overrightarrow{grad}\,f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$
$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$
$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)\right] \\ \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right] \end{vmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\varphi)\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right] \end{vmatrix}$
$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ $\overrightarrow{\Delta \vec{F}} = \Delta F_x\,\vec{e}_x + \Delta F_y\,\vec{e}_y + \Delta F_z\,\vec{e}_z$	$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

$\overrightarrow{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{F}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) + \overrightarrow{\Delta \vec{F}}$	$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \Delta f$ $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) = 0$	$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \vec{0}$ $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{F}\right) - \overrightarrow{\Delta \vec{F}}$
$\overrightarrow{grad}\,(f+g) = \overrightarrow{grad}\,f + \overrightarrow{grad}\,g$ $\overrightarrow{grad}\,(f\,g) = f\,\overrightarrow{grad}\,g + g\,\overrightarrow{grad}\,f$ $\overrightarrow{grad}\,(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \left(\vec{F}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{G}\right) + \left(\vec{G}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) + \left(\vec{G}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{G}$	$\mathrm{div}\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \mathrm{div}\,\vec{F} + \mathrm{div}\,\vec{G}$ $\mathrm{div}\,(f\,\vec{F}) = f\,\mathrm{div}(\vec{F}) + \vec{F}\cdot\overrightarrow{grad}\,f$ $\mathrm{div}\,(\vec{F}\wedge\vec{G}) = \vec{G}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{F} - \vec{F}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{G}$	$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \overrightarrow{rot}\,\vec{F} + \overrightarrow{rot}\,\vec{G}$ $\overrightarrow{rot}\,(f\,\vec{F}) = f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{F} - \left(\vec{F}\wedge\overrightarrow{grad}\,f\right)$ $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\wedge\vec{G}\right) = \vec{F}\,\mathrm{div}\,\vec{G} - \vec{G}\,\mathrm{div}\,\vec{F} + \left(\vec{G}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{F} - \left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{G}$